5-8 класс

Внимание! Каждое задание оценивается в 10 баллов. Решение каждой задачи должно быть подробным. Верный ответ без пояснений оценивается в ноль баллов. Время выполнения – 60 минут.

1. Учитывая, что каждая буква скрывает разную ненулевую цифру, разгадайте что скрывается под буквой М:

$$С+У+М+М+А =11.$$

Ответ поясните.

Решение. Так как «М» повторяется дважды, то «М» не может быть больше, чем 1. Действительно, если «М» больше 1, например, даже если М=2, то тогда «С», «У», «А» должны быть различными и больше 2, например, 3, 4, 5 соответственно. Тогда С+У+М+М+А=3+4+2+2+5≠11. Если М больше 2, то, очевидно, С+У+М+М+А≠11. Значит, М=1. Действительно, если М=1, С=2, У=3, А=4, то С+У+М+М+А=2+3+1+1+4=11.

2. На кружок пришли три девочки: Аня, Маша, Кристина, живущие в разных районах Екатеринбурга: Уралмаш, Академический, Центр. Если Аня живёт на Уралмаше, то Кристина не живёт в Академическом. Если Маша не живёт в Академическом, то Аня живёт на Уралмаше. Если Кристина не живёт на Уралмаше, то Маша живёт в Центре. Определите, какая девочка где живёт.

Решение. Предположим, что Маша не живёт в Академическом, тогда (по условию 2) Аня живёт на Уралмаше, но если Аня живёт на Уралмаше, то Кристина (по условию 1) не живёт в Академическом — получилось явное противоречие. Значит, Маша живёт в Академическом. Тогда Кристина – на Уралмаше — иначе (по условию 3) Маша жила бы в Центре. Значит, Аня живёт в Центре. Итак: Аня живёт в Центре, Маша в Академическом, а Кристина на Уралмаше.

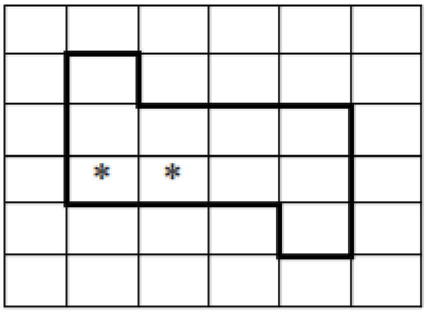
3. Малыш копит монеты 4-х различных номиналов: 1 рублёвые, 2 рублёвые, 5 рублёвые и 10 рублёвые. В копилке в данный момент находится 2014 одинаковых монет 4-х выше указанных номиналов. Сестрёнка малыша наугад вытаскивает 1900 монет из копилки и видит, что среди них есть все 4 номинала. Какое наименьшее количество монет необходимо вытащить, не заглядывая в копилку, чтобы среди них точно нашлось 3 монеты различного номинала.

Решение. Из условия следует, что монет любого номинала в копилке не менее 115. В противном случае можно вытащить 1900 монет – всех, кроме тех, которых меньше 115, среди которых не все номиналы будут представлены. Следовательно, среди любых монет, вытащенных из копилки, всегда найдутся три разного номинала. Если, например, в копилке монет трех номиналов будет по 115, а остальные – четвертого номинала, то меньшим числом обойтись нельзя. Соответственно ответ: 1785.

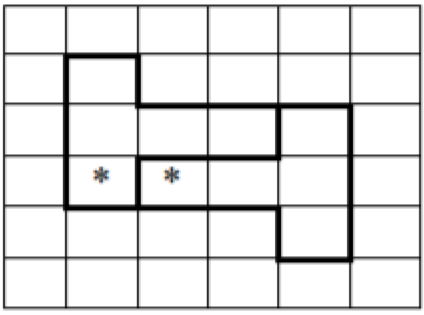
4. В школе учатся 3 класса пятиклассников. «А» класс ходит в театр каждый третий день, «Б» класс – каждый пятый день, а «В» класс – каждый седьмой день. Так оказалось, что вчера все три класса были в театре. Когда в следующий ближайший раз снова все классы будут вместе в театре?

Решение. Ближайший следующий раз будет в день с номером, который делится и на 3, и на 5, и на 7 и при этом является наименьшим таким числом. Ответ: 105.

5. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте на две равные части так, чтобы в каждой части было по одной звездочке. Разрезать можно только по линиям сетки.



Решение.



9-11 класс

Внимание! Каждое задание оценивается в 10 баллов. Решение каждой задачи должно быть подробным. Верный ответ без пояснений оценивается в ноль баллов. Время выполнения – 90 минут.

1. Решить уравнение в действительных числах:

$$x^{12} + 3x^6 + 5x^2 + 25 = 0.$$

Решение. Преобразуем: $x^{12} + 3x^6 + 5x^2 = -25$.

Очевидно, что $x^{12} + 3x^6 + 5x^2 > 0$, при этом правая часть – отрицательная. Таким образом, действительных корней нет.

2. Две подружки: Карина и Кристина решили заняться спортом на дорожке местного парка, образующей круг. Кристина возвращается в исходную точку за 4 минуты, Карина выбегает одновременно с Кристиной из той же точки на спор и бежит в другую сторону, и прибегает в исходную точку через 6 минут. Через сколько минут они встретятся?

Решение. Так как Карина пробегает круг за 4 минуты, а Кристина – за 6 минут, то можно считать скорость Карины за 1/4, а Кристины за 1/6. Обозначим время бега Кристины за x, он совпадает со временем бега Карины. Тогда (1/4+1/6)x=1. Получаем ответ: 2,4.

3. Малыш взял шесть карточек, на каждой из которых написано по одной цифре от 1 до 6. Малыш раскладывается все возможные комбинации этих шести цифр, тем самым получая шестизначные числа. Помогите малышу понять, *сколько* из них будут делиться на 6.

Решение. Натуральное число делится на шесть тогда и только тогда, когда оно делится и на два и на три. Отсюда следует, что все искомые числа должны оканчиваться четной цифрой, и иметь сумму цифр кратную трем. Первому условию удовлетворяют три цифры: 2, 4 и 6. Покажем, что для выполнения второго условия последней цифрой может быть только одна из них. Действительно, пусть S – сумма первых пяти цифр, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и кратного 6. Если S кратна трем, то в качестве последней цифры можем выбрать только одну цифру, а именно цифру 6, чтобы сумма всех цифр делилась на три. Другие цифры – 2 и 4 – не подходят, так как сумма цифр числа не будет кратна 3. Если S при делении на 3 дает остаток 1, то в качестве последней цифры можно взять только 2. Наконец, если S при делении на 3 дает остаток 2, то последней цифрой может быть только цифра 4. Следовательно, число шестизначных натуральных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и кратных шести ровно столько же, сколько имеется пятизначных натуральных чисел, записанных теми же цифрами, то есть 7776.

4. Винни-Пух после того, как упал со столба, решил измерить его длину. Сначала он отошёл на расстояние 30 метров от столба и измерил углы под которыми виден столб, затем отошёл на 60 метров, после на 90 метров. Таким образом, он получил три значения углов, в сумме которые образуют 90°. Какова высота столба.

Решение. Пусть DE – столба, отрезки DA, DB, DC перпендикулярны DE, угол DAE=α, угол DBE=β, угол DCE=γ. DA=30, DB=60, DC=90. Нужно найти x=DE при условии, что $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

tg $\alpha=\frac{x}{30}$, tg $\beta=\frac{x}{60}$, tg $\gamma=\frac{x}{90}$. Обозначим k= tg α, тогда tg $\beta=\frac{k}{2}$, tg $\gamma=\frac{k}{3}$. С другой стороны:

k= tg $\alpha=tg(90-\beta-\gamma)=\frac{1}{tg(\beta+\gamma)}=\frac{1-tg\beta tg\gamma}{tg\beta+tg\gamma}=\frac{1-\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{3}}{\frac{k}{2}+\frac{k}{3}}=\frac{6-k^2}{5k}$.

Таким образом, имеем: k= $\frac{6-k^2}{5k}$. Получаем, что к=1, а высота столба 30 метров.

5. Пусть $a\geq 0, b\geq 0$ и $a+b\leq 2$. Докажите, что $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\geq 1$.

Решение. Преобразуем разность $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}-1=\frac{1+b+1+a-1-a-b-ab}{(1+a)(1+b)}=\frac{1-ab}{(1+a)(1+b)}$. Поскольку a и b неотрицательны, то знак разности зависит от знака числителя $1-ab$. Покажем, что это выражение не отрицательно. Действительно, из условий $a\geq 0$, $b\geq 0$ и неравенства $a+b\leq 2$ следует $a^2+2ab+b^2\leq 4$. А из того, что $(a-b)^2\geq 0$ имеем $a^2+b^2\geq 2ab$. Подставляя в предыдущее неравенство, получим $4ab\leq a^2+2ab+b^2\leq 4$. Откуда $ab\leq 1$. Следовательно, $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}-1=\frac{1-ab}{(1+a)(1+b)}\geq 0$.

6. На вечеринку пришли 10 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, . . . , 9 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце вечеринки?

Решение. Нетрудно проверить, что если все пришедшие, кроме двух человек A и B, были знакомы между собой, то в конце должны остаться все, кроме A и B, т.е. 8 человек. Докажем, что не могло остаться 9 человек. Ясно, что человек A, имевший изначально меньше всего знакомых (k), в некоторый момент уйдет. Если больше никто не ушел, то все остальные (кроме A) имели больше k знакомых до ухода A и меньше k + 1 после его ухода. Но тогда A должен быть знаком со всеми остальными, т. е. k = 9, что противоречит строгой минимальности k.